Ecole Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1982

MATHEMATIQUES
2ème épreuve

Nota : les problèmes 1 et 2 sont indépendants.

PROBLEME I

Préliminaires

x désigne un nombre réel, tel que $0 < x < 1$.

a - Calculer pour $n \geqslant 2$ les sommes :

$$S_1(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x^{k-1},$$

$$S_2(x) = \sum_{k=2}^{n} k\,(k-1)\, x^{k-2}.$$

b - En déduire la somme des séries

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\, x^{k-1} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k\,(k-1)\, x^{k-2}.$$

Problème

On considère une urne U , contenant des boules rouges et des boules blanches.

On note p, $0 < p < 1$, la probabilité de l'événement *«tirer une boule rouge de l'urne»*.

On effectue des tirages successifs avec remise et l'on arrête ces tirages dès que l'on a tiré pour la deuxième fois une boule rouge.

On note X le nombre total de tirages qu'il a fallu réaliser pour obtenir deux boules rouges.

Question 1

Quelle est la probabilité de tirer une seule boule rouge en $k-1$ tirages avec $k \geqslant 2$?

Question 2

Déterminer la loi de probabilité de X .

Calculer l'espérance mathématique de X . .

Question 3

On note W_n l'évènement suivant : *«l'obtention de la deuxième boule rouge s'est produite avant d'atteindre le $n^{ième}$ tirage»*.

. . . / . .

a - Calculer la probabilité π_n de W_n .

b - On suppose que $p = 0,25$; déterminer n pour que π_n soit strictement supérieur à 0,95 .

Question 4

L'épreuve précédente est utilisée sous forme de jeu.

Au début du jeu le joueur mise une somme de 10 francs. A chaque tirage effectué cette somme diminue de 1 franc.

Le jeu s'arrête, soit lorsque cette somme est nulle, soit lorsque le joueur a obtenu une deuxième boule rouge, le joueur recevant alors deux fois la somme restante.

On note Y la variable aléatoire correspondant à la somme perçue par le joueur en fin de partie.

On suppose que $p = \frac{1}{2}$.

a - Déterminer la loi de probabilité de Y .

b - Calculer l'espérance mathématique de Y .

PROBLEME 2

Dans la suite $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé, et on rappelle que deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ sont indépendantes si et seulement si :

pour tout couple (i, j) d'entiers naturels, on a :

$P(X = i \text{ et } Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j)$.

1ère partie :

X et Y désignent deux variables aléatoires, distinctes, à valeurs dans le sous ensemble fini de $\mathbb{N}$, $\{0, 1, ..., n\}$:

$X : \Omega \longrightarrow \{0, 1, ..., n\}$,

$Y : \Omega \longrightarrow \{0, 1, ..., n\}$.

Pour tout k élément de $\{0, 1, ..., n\}$, on note :

$p_k = P(X = k)$, $q_k = P(Y = k)$.

On définit l'application G_X suivante :

$G_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto G_X(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + ... + p_n x^n$.

G_X est appelée fonction génératrice de X .

On remarquera que la distribution de probabilité de la variable aléatoire X est déterminée de façon unique par la fonction génératrice G_X .

Question 1

Déterminer G_X lorsque :

a - X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1\}$, et $P(X = 1) = p$, $0 < p < 1$;

b - X est une variable binomiale de paramètres n, p, où n désigne un entier naturel et $0 < p < 1$.

Question 2

On note respectivement E (X) et V (X) l'espérance mathématique de X et la variance de X .

a - Exprimer E (X) et V (X) en fonction de G'_X (1) et G''_X (1) .

b - Retrouver ainsi l'espérance mathématique et la variance d'une variable binomiale.

Question 3

Soit λ un élément de $\mathbb{N}^*$, et Z la variable aléatoire définie par : $Z = \lambda X$.
Déterminer la fonction génératrice G_Z de Z en fonction de G_X .

Question 4

On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et on définit la variable aléatoire S par :

$S = X + Y$.

a - Déterminer la fonction génératrice G_S de S en fonction de G_X et G_Y .

b - Retrouver à partir des résultats de la question 4-a les relations entre E (X + Y), E (X), E (Y) et entre V (X + Y), V (X), V (Y) .

2ème partie :

X désigne maintenant une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$.

Pour tout k élément de $\mathbb{N}$, on note :

$p_k = P(X = k)$.

Question 1

On considère la série de terme général $u_k(x)$ défini par :

si x est élément de]0 , 1] , $u_k(x) = p_k\, x^k$;

$u_0(0) = p_0$, et , pour tout $k \neq 0$, $u_k(0) = 0$.

Montrer que la série de terme général $u_k(x)$ est convergente, quel que soit x élément de [0 , 1] .

Pour tout x élément de [0 , 1] , on notera :

$$G_X(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} u_k(x) .$$

Question 2

Déterminer G_X dans le cas où X suit une loi de Poisson de paramètre λ .

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail